NTNU

Sensurveiledning

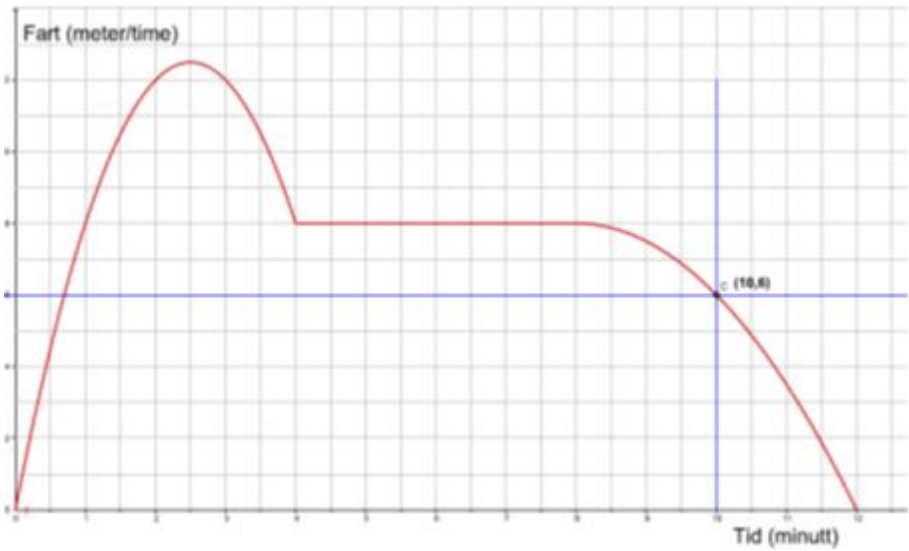
Emnekode: LGU 52003	**Emnenavn:** Matematikk 2 (5-10), emne 2	
Semester: VÅR	**År:** 2016	**Eksamenstype:** Skriftlig

Oppgave 1

Grafen i Vedlegg 1 viser farten som en deltaker i et ultramaraton holder over en tidsperiode på 12 timer.

a) Hva er farten når det er gått 10 timer?

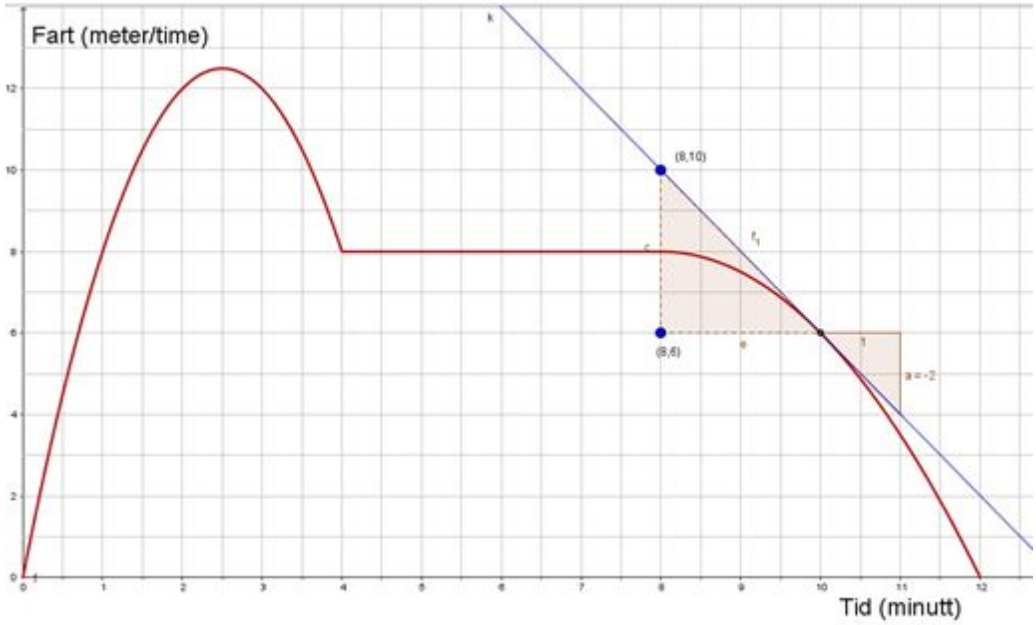
Vi ser ved avlesning at farten etter 10 timer er 6 km/t (det er ikke så viktig at svaret er helt nøyaktig).



b) Forklar hvordan du kan lese av akselerasjonen etter 10 timer.

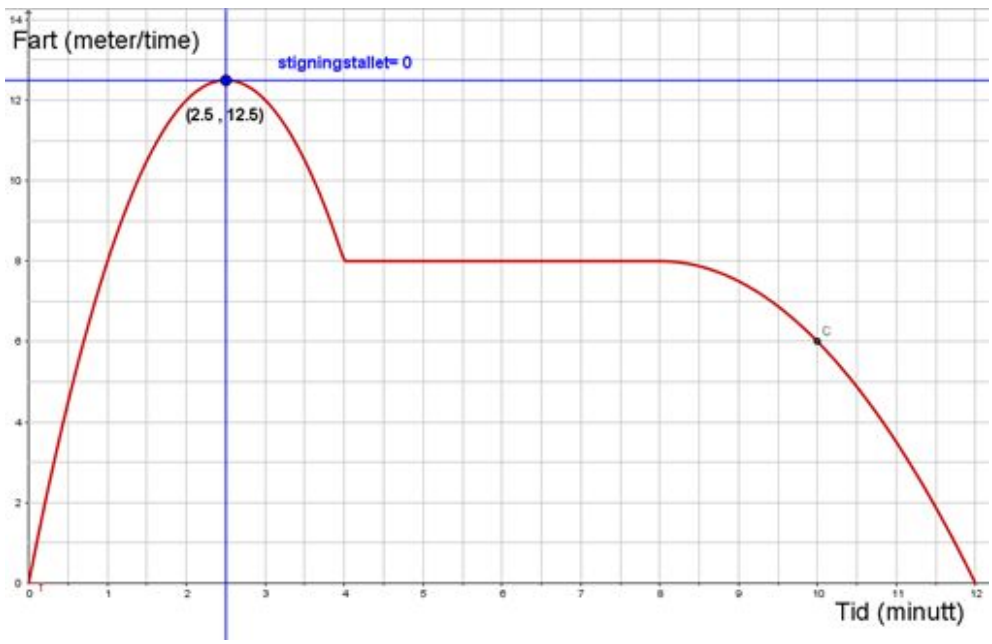
Vi finner akselerasjonen etter 10 timer ved å tegne tangentlinjen til grafen ved tid 10 timer og beregne stigningstallet. Vi kan gjøre dette ved å velge to punkter på tangentlinjen, for eksempel (10,6) og (8,10), som gir

$$a = \frac{10-6}{8-10} = \frac{4}{-2} = -2\ km/t^2$$



c) Hva er den største farten deltakeren har i løpet av tidsperioden? Når skjer det?

Den største farten deltakeren har i løpet av 12 timer er 12.5 km/t, noe som skjer etter 2.5 timer.



Vi antar at farten etter x timer er gitt ved:

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 10x & : 0 \le x \le 4 \\ 8 & : 4 < x < 8 \\ -\frac{1}{2}(8-x)^2 + 8 & : 8 \le x \le 12 \end{cases}$$

d) Bruk funksjonen til å finne den største farten deltakeren har i løpet av turen.

Farten er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 10x & : 0 \le x \le 4 \\ 8 & : 4 < x < 8 \\ -\frac{1}{2}(8-x)^2 + 8 & : 8 \le x \le 12 \end{cases}.$$

Den deriverte blir

$$f'(x) = \begin{cases} -4x + 10 & : 0 \le x \le 4 \\ 0 & : 4 < x < 8. \\ 8 - x & : 8 \le x \le 12 \end{cases}$$

Hvis $0 \le x \le 4$, så $f'(x) = -4x + 10$. Vi finner kritiske punkter ved å løse $f'(x) = 0$, altså $-4x + 10 = 0$.
Det gir $x = 2.5$ og funksjonsverdien (farten) i dette punktet blir $f(2.5) = 12.5$.

Hvis $4 < x < 8$, så er farten konstant lik 8 km/time.

Hvis $8 \le x \le 12$, så er $f'(x) = 8 - x$, som er 0 hvis og bare hvis $x = 8$. Funksjon verdien (farten) i dette punktet blir $f(8) = -\frac{1}{2}(8-8)^2 + 8 = 8$.

Farten i endepunktene x = 0 og x = 12 er 0, så den største farten deltakeren har i løpet av turen blir 12.5 km/t.

e) Bruk funksjonen til å finne ut hvor langt deltakeren har løpt.

Den totale avstanden deltakeren har tilbakelagt svarer til arealet under hastighetskurven over det aktuelle tidsrommet, altså

$$\int_0^{12} f(x)dx = \int_0^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx + \int_8^{12} f(x)dx$$

$$= \int_0^4 -2x^2 + 10x\,dx + \int_4^8 8\,dx + \int_8^{12} -\frac{1}{2}(8-x)^2 + 8\,dx$$

$$= \int_0^4 -2x^2 + 10x\,dx + \int_4^8 8\,dx + \int_8^{12} -\frac{1}{2}x^2 + 8x - 24\,dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2\right]_0^4 + [8x]_4^8 + \left[-\frac{1}{6}x^3 + 4x^2 - 24x\right]_8^{12}$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2\right]_0^4 + [8x]_4^8 + \left[-\frac{1}{6}x^3 + 4x^2 - 24x\right]_8^{12}$$

$$= \left[\left(-\frac{2}{3}\cdot 4^3 + 5\cdot 4^2\right) - 0\right] + [8\cdot 8 - 8\cdot 4]$$
$$+ \left[\left(-\frac{1}{6}\cdot 12^3 + 4\cdot 12^2 - 24\cdot 12\right) - \left(-\frac{1}{6}\cdot 8^3 + 4\cdot 8^2 - 24\cdot 8\right)\right]$$

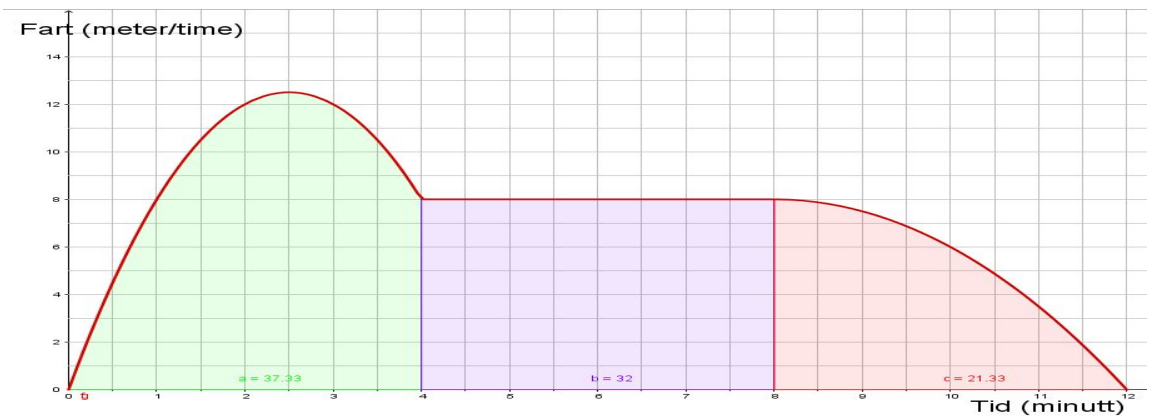
$$= \left[\left(-\frac{128}{3} + 80\right)\right] + [32] + \left[(-288 + 576 - 288) - \left(-\frac{512}{6} + 64\right)\right]$$

$$= \left[\left(-\frac{128}{3} + \frac{240}{3}\right)\right] + [32] + \left[(-288 + 576 - 288) - \left(-\frac{512}{6} + 256 - 192\right)\right]$$

$$= \left(\frac{112}{3}\right) + 32 + \left[(0) - \left(-\frac{128}{6}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{112}{3}\right) + 32 + \left(\frac{64}{3}\right)$$

$$\approx 37.33 + 32 + 21.33 = 90.66 \text{ kilometer}$$



Oppgave 2

En funksjon f er gitt ved $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

a) Vi vet at $x = -2$ er et nullpunkt på grafen. Utfør polynomdivisjonen og vis at $x = 1$ og $x = -3$ også er nullpunkter.

Vi må først utføre polynomdivisjonen

$$
\begin{array}{l}
x^3 + 4x^2 + x - 6 : (x+2) = \underline{x^2 + 2x - 3} \\
\underline{-(x^3 + 2x^2)} \\
\quad 0 + 2x^2 + x \\
\quad \underline{-(2x^2 + 4x)} \\
\qquad 0 - 3x - 6 \\
\qquad \underline{-(3x - 6)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Videre faktoriseres andregradsuttrykket:

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$$

Dette viser at også x=1 og x=-3 er nullpunkter til *f*. Vi har nå at

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$$

b) Deriver funksjonen og finn eventuelle topp- el1ler bunnpunkt på grafen.

Derivasjon og påfølgende løsning av ligningen $f'(x) = 0$ gir

$$f'(x) = 3x^2 + 8x + 1$$

$$3x^2 + 8x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{13}}{3}$$

$$\underline{x \approx -2{,}54 \vee x \approx -0{,}13}$$

Vi har $f''(x) = 6x + 8$ og vi ser at $f''(\frac{-4+\sqrt{13}}{3}) = 2\sqrt{13} > 0$ og $f''(\frac{-4-\sqrt{13}}{3}) = -2\sqrt{13} < 0$, så $x = \frac{-4-\sqrt{13}}{3} \approx -2.54$ er et lokalt maksimum for f, mens $x = \frac{-4+\sqrt{13}}{3} \approx -0,13$ er et lokalt minimum for f. Regner vi ut funksjonsverdiene tilhørende disse x-verdien får

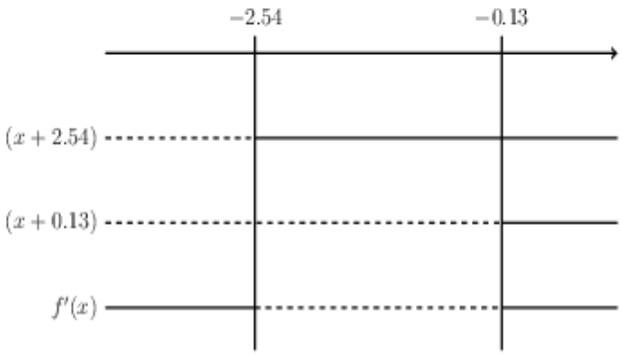
vi at grafen har et lokalt toppunkt i (omtrent) $(-2.54, 0.88)$ og et lokalt bunnpunkt i (omtrent) $(-0.13, -6.06)$.

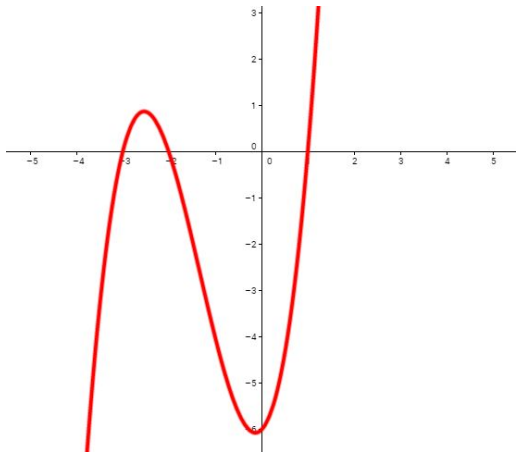
c) Bruk et fortegnsskjema som utgangspunkt for å lage en skisse av grafen.

Fra b) har vi at den deriverte er $f'(x) = (x - \frac{-4-\sqrt{13}}{3})(x - \frac{-4+\sqrt{13}}{3}) \approx (x+2.54)(x+0.13)$

Fra a) har vi nullpunktene x=-3, x=-2 og x=1.

I fortegnsskjemaet for den deriverte ser vi i hvilke intervaller for x grafen er strengt voksende og strengt avtagende, og kan dermed lage en skisse av grafen.





d) Hva er et vendepunkt? Har grafen til f et vendepunkt, og eventuelt hvor?

Et vendepunkt er et punkt der grafen går over fra å være konveks til konkav eller omvendt. Vi kan også si at grafen går fra å krumme nedover til å krumme oppover eller omvendt. Vi finner et eventuelt vendepunkt ved først å løse ligningen $f''(x) = 0$ for x, og deretter sjekke om $f''(x)$ skifter fortegn i disse punktene.

Vi finner ved derivasjon at $f''(x) = 6x + 8$ og dermed er $f''(x) = 0$ for $x = -8/6 = -4/3$, og siden $f''(0) = 8$ og $f''(-2) = -4$, så ser vi at $f''(x)$ også skifter fortegn her (vi kunne også brukt at $f'''(x) = 6$, altså er $f''(x)$ strengt voksende).

$$f''(x) = 6x + 8$$

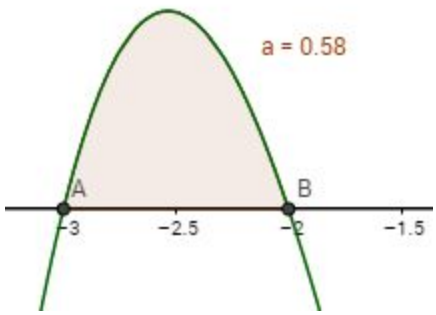
$$6x + 8 = 0 \Rightarrow \underline{x = -1\frac{1}{3} \approx -1{,}33}$$

$$\text{Vendepunkt}: \quad (-1{,}33 \quad , \quad f(-1{,}33)) \approx \underline{\underline{(-1{,}33 \quad , \quad -2{,}59)}}$$

e) Finn funksjonsuttrykket til tangenten i punktet $(0,-6)$.

En rett linje kan beskrives ved ligningen $y = ax + b$ der a er stigningstallet og $(0,b)$ er skjæringspunktet mellom linjen og y-aksen. Stigningstallet til tangenten i (0,-6) er f'(0)=1, altså er $a = 1$ og siden linjen går gjennom punktet $(0,-6)$ så blir $b = -6$. Dermed er ligningen for tangentlinjen i punktet $(0,-6)$ gitt ved $y = x - 6$.

f) Finn arealet under grafen i intervallet $[-3,-2]$.



$$\int_{-3}^{-2}\left(x^3+4x^2+x-6\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x\right]_{-3}^{-2}$$

$$=\left[\frac{1}{4}(-2)^4+\frac{4}{3}(-2)^3+\frac{1}{2}(-2)^2-6(-2)\right]-\left[\frac{1}{4}(-3)^4+\frac{4}{3}(-3)^3+\frac{1}{2}(-3)^2-6(-3)\right]$$

$$=\left[4-\frac{32}{3}+2+12\right]-\left[\frac{81}{4}-36+\frac{9}{2}+18\right]=\frac{7}{12}\approx 0{,}583$$

$$\underline{\underline{A=\frac{7}{12}\approx 0{,}58}}$$

Oppgave 3

Tor holder opp seks kort (ess til seks) og ber deg trekke.

a) Hva er sannsynligheten for at du får sekseren når du trekker ett kort? Hva er sannsynligheten for at du får sekseren når du trekker tre kort (uten tilbakelegging)?

Det er seks kort, og alle er like sannsynlige, så sannsynligheten for å få sekseren når du trekker ett kort er ⅙. Når du trekker tre kort er det like sannsynlig at sekseren er et av kortene du trekker som at den er et av kortene

som er igjen, så sannsynligheten er ½. (En kan også bruke formelen for den hypergeometriske sannsynlighetsfordelingen.)

Du kaster tre terninger. Tor påstår at siden sjansen for å få seks på en terning er 1/6, så må sannsynligheten for å få minst en sekser være $3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

b) Kommenter påstanden til Tor. Hva er sannsynligheten for å få minst en sekser?

Etter Tors resonnement vil sannsynligheten for å få en sekser i løpet av 7 kast være over 1, og det går jo ikke. I oppgave a) ville Tors tenkemåte fungert, siden hendelsene "sekser på første kort", "sekser på andre kort" og "sekser på tredje kort" er disjunkte. Med terninger kan vi få seks på flere enn en terning, så da må en trekke fra sannsynligheten for snittet av hendelsene. For å finne sannsynligheten for å få minst en sekser er det enklest å finne sannsynligheten for ingen seksere og bruke komplementsetningen, altså at $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ for enhver hendelse A. Hvis X er antall seksere har vi $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (\frac{5}{6})^3 = \frac{91}{216} \approx 0,421$

c) Tor vedder 50 kr på at du kommer til å få minst en sekser, og du vedder i mot. La X være gevinsten din på veddemålet (hvis du taper, er X negativ). Finn E(X) og Var(X).

X har to mulige verdier, 50 og -50. Fra b) har vi $P(X = -50) = \frac{91}{216}$ og vi får da at $P(X = 50) = 1 - \frac{91}{216} = \frac{125}{216}$. Dette gir $E(X) = 50 \cdot P(X = 50) + (-50) \cdot P(X = -50) = 50 \cdot \frac{125}{216} + (-50) \cdot \frac{91}{216} = \frac{1700}{216} = 7,87$. I det lange løp vil du altså tjene på veddemålet.

Variansen blir $Var(X) = (50 - E(X))^2 \cdot P(X = 50) + (-50 - E(X))^2 \cdot P(X = -50)$
$= (50 - \frac{1700}{216})^2 \cdot \frac{125}{216} + (-50 - \frac{1700}{216})^2 \cdot \frac{91}{216} \approx 2438,06$

Tor antar at du jukser med terningene og vil heller spille kort igjen. Han fjerner alle kort fra 7 til konge i en kortstokk, og stokker de resterende 24 kortene. Du trekker tre kort.

d) Hva er nå sannsynligheten for å få minst en sekser? Hvorfor blir ikke svaret det samme som i a eller b?

La X være antall seksere. Da er X hypergeometrisk fordelt, så sannsynligheten for å få minst ein sekser er $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{4C0 \cdot (24-4)C3}{24C3} = \frac{884}{2024} = 0,437$ (vi skriver her nCr (f.eks $24C3$) for antall uordnede utvalg på r elementer fra en mengde med n elementer).

Som i b) kan vi her få flere enn en sekser, derfor får vi ikke samme svar som i a). I b) var imidlertid antallet seksere binomisk fordelt, mens det her er hypergeometrisk fordelt, så vi får ikke samme svar som i b) heller.

Oppgave 4

En produsent av sportsutstyr ønsker å undersøke produksjonen av en bestemt type fiskesnøre. En viktig egenskap i denne sammenhengen er bruddstyrken. Det er ønskelig at forventet bruddstyrke μ for denne type fiskesnøre er 14 kg. Variansen σ^2 antas å være kjent og lik 0,49 kg^2.

a) Anta først at bruddstyrken til fiskesnørene er normalfordelte. En kontrollør tester bruddstyrken på ett fiskesnøre og finner verdien 13,2 kg. Gjennomfør en hypotesetest av $H_0 : \mu = 14\ kg$ mot $H_1 : \mu < 14\ kg$ med signifikansnivå $\alpha = 0,05$. Hvorfor tror du at den alternative hypotesen er $\mu < 14\ kg$ og ikke $\mu \neq 14\ kg$?

Vi er altså interessert i å sette en grense k for hvor lav bruddstyrke på et tilfeldig valgt fiskesnøre vi er villig til å akseptere før vi forkaster nullhypotesen. Siden signifikansnivået er 5 %, så er kravet at $P(X \leq k) = 0,05$ under antagelsen at nullhypotesen er oppfyllt, altså at $\mu = 14\ kg$, der X er bruddstyrken i et tilfeldig valgt fiskesnøre. Vi utnytter symmetrien omkring forventningsverdien i normalfordelingen, og finner (fra tabell) at $P(Z \leq 1,645) = 0,95$, der Z er en standard normalfordelt variabel. Dermed er $P(Z \geq 1,645) = 0,05 = P(Z \leq 1,645)$. Vi kan altså velge k til å være $1,645$ standardavvik, altså $1,645 \cdot \sqrt{0,49} = 1,645 \cdot 0,7$ under forventningsverdien på $14\ kg$ (jfr. formelen $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$), altså $14\ kg - 1,645 \cdot 0,7 = 12,8485$. Bruddstyrken på det aktuelle fiskesnøret var $13,2\ kg$, som er større enn $12,8485$, og vi aksepterer dermed nullhypotesen.

Det er også mulig å ta en litt annen vei her, nemlig å se på hva $P(X \leq 13,2)$ er - er den lavere enn $\alpha = 0,05$ så forkaster vi nullhypotesen. Vi finner denne sannsynligheten ved å regne om avstanden fra forventningsverdien til den observerte verdien, altså $0,8$, til $0,8/0,7 \approx 1.14$ standardavvik, og deretter slå opp dette i normalfordelingstabellen. Vi finner verdien $0,8729$, som svarer til $P(Z \leq 1.14) = 1 - P(Z \geq 1.14) = 1 - P(Z \leq -1.14)$, så vi finner at $P(X \leq 13.2) = 1 - 0,8729 = 0,1271$, og vi aksepterer dermed nullhypotesen.

Årsaken til at den alternative hypotesen er valgt slik, er trolig at produsenten ikke mener det betyr noe at fiskesnørene er for sterke (altså har for stor bruddstyrke). Det er bare avvik i produksjonsprosessen som fører til for lav bruddstyrke som det er viktig å oppdage.

b) Anta nå i stedet at $\mu = 13,5\ kg$. Hva blir sannsynligheten for å forkaste hypotesen H_0 fra punkt a over, dersom denne alternative hypotesen er

sann. Er dette en god test, dersom bedriften er avhengig av å oppdage avvik i forventningsverdien på mer enn 0,5 kg?

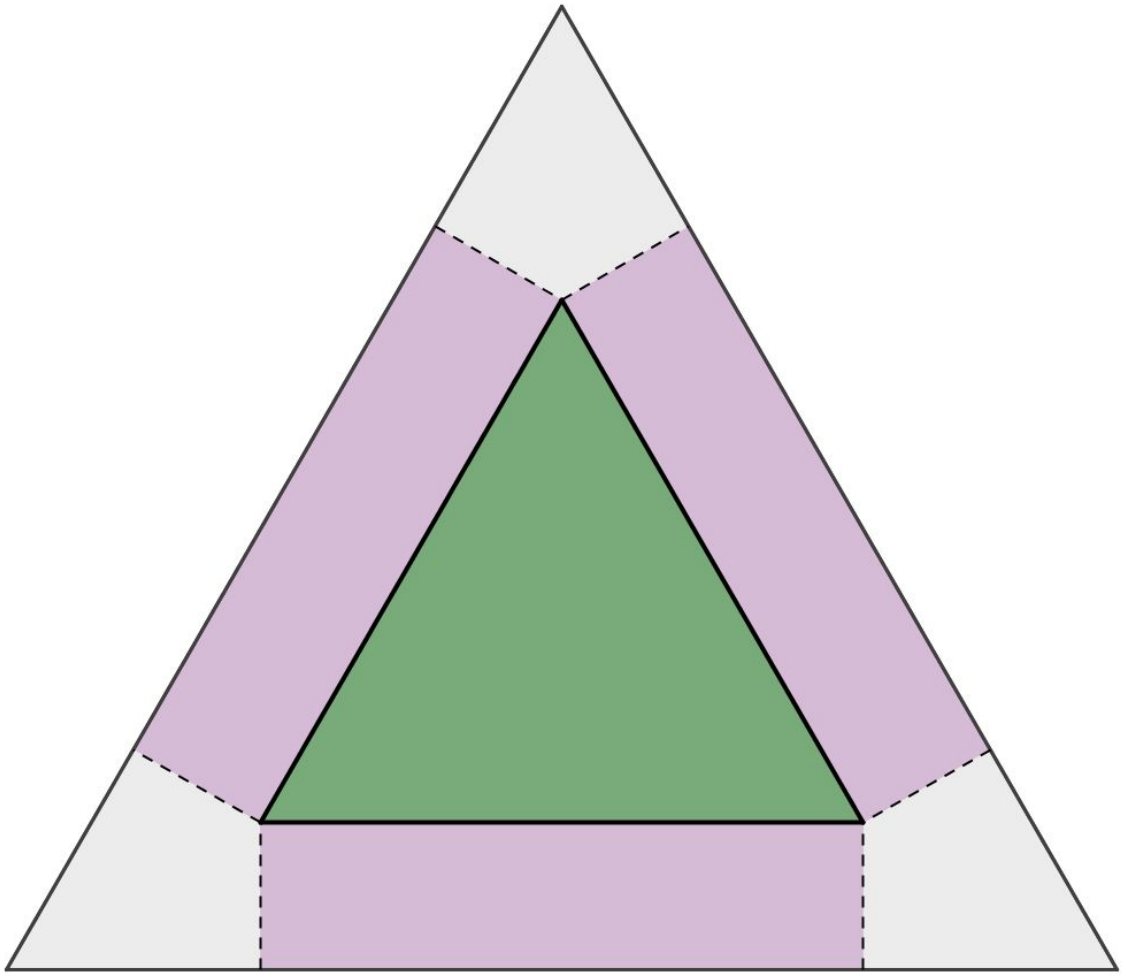
I testen over, forkaster vi nullhypotesen dersom fiskesnøret vi velger ut har bruddstyrke lavere enn $12,8485\ kg$. Vi er altså på jakt etter $P(X \leq 12,8485)$ under antagelsen om at $\mu = 13,5$. Vi har at $13,5\ kg - 12,8485\ kg = 0,6515\ kg$, og sistnevnte er $\frac{0,6515}{0,7} \approx 0,93$ standardavvik. Sannsynligheten vi er på jakt etter kan dermed også uttrykkes som $P(Z \leq -0,93)$, der Z igjen er en standard normalfordelt variabel. Vi vet at $P(Z \leq -0,93) = P(Z \geq 0,93)$ p.g.a symmetri, og $P(Z \geq 0,93) = 1 - P(Z \leq 0,93)$. Vi kan slå opp verdien av $P(Z \leq 0,93)$ i tabellen, noe som gir $0,8238$. Dermed blir $P(Z \leq -0,93) = 1 - 0,8238 = 0,1762$ (under antagelsen at $\mu = 13,5\ kg$).

For å oppdage et avvik, må nullhypotesen forkastes. Dersom avviket er nøyaktig lik $0,5\ kg$, har vi altså funnet ut at det bare er ca. 17% sannsynlighet for å forkaste nullhypotesen, så denne testen er ikke godt egnet i den sammenhengen (den vil virke slik den skal i under 1 av 5 tilfeller i snitt).

c) Hva ville du gjort annerledes dersom fordelingen til bruddstyrken ikke var kjent? (Du kan fortsatt anta at variansen σ^2 er kjent og lik 0,49 kg^2)

Det mest nærliggende her er å bruke sentralgrenseteoremet. I stedet for å gjøre en enkeltobservasjon, så tar vi en stikkprøve på n fiskesnører, der $n \geq 30$ (dette er en tommelfingerregel fra læreboka) og ser på verdien av stikkprøvegjennomsnittet i stedet. Sistnevnte er da (tilnærmet) normalfordelt med samme forventning og varians σ^2/n, i følge sentralgrenseteoremet, og vi kan bruke dette til å gjennomføre en tilsvarende hypotesetest.

Oppgave 5



I denne oppgaven skal dere lage en beholder fra en likesidet trekant ved å klippe vekk hjørnene langs de stiplede linjene (slik at den grønne trekanten er likesidet) i den grå trekanten for så å brette de lilla flappene opp.

Anta at overflateareal til hele trekanten er $3600\sqrt{3}\ cm^2$.

a) Hva er sidelengden til den store trekanten?

Arealet til en likesidet trekant er gitt ved formelen $A = \frac{\sqrt{3}s^2}{4}$, der s er sidelengden i trekanten. Fra opplysningene i oppgaven har vi at:

$$3600\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}s^2}{4}$$

$$36 \cdot 100 \cdot 4 = s^2$$

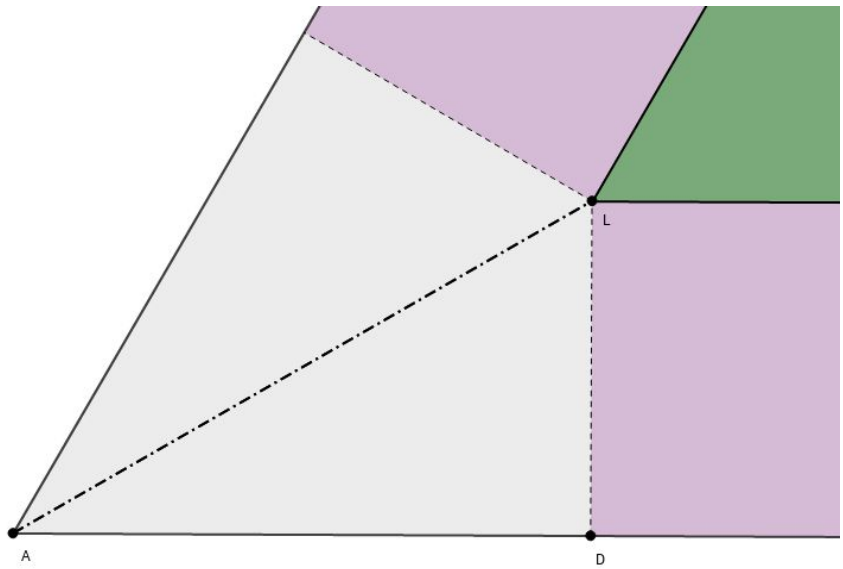
$$2 \cdot 6 \cdot 10 = s$$

Dvs. $s = 120$.

La så x være høyden i den ferdigbrettede beholderen.

b) Vis at volumet, $V(x)$, i beholderen er gitt ved funksjonsuttrykket
$V(x) = \sqrt{3} \cdot x \cdot (60 - \sqrt{3} \cdot x)^2$

Volumet av beholderen vil være gitt som arealet av den innerste (grønne) trekanten, A(x), multiplisert med høyden i beholderen, x. For å finne arealet til den innerste trekanten må vi finne sidelengdene til den. Dette kan vi gjøre ved å for eksempel finne lengden AD i figuren under.



Pr. konstruksjon vil $\angle DAL = 30^\circ$ og $\angle D = 90^\circ$ og dermed er ΔADL en 30-60-90-trekant. Da vet man at $AD = \sqrt{3} \cdot LD = \sqrt{3} \cdot x$. Sidelengden i den innerste trekanten vil da være $t = 120 - 2 \cdot AD = 2(60 - \sqrt{3} \cdot x)$.
Arealet av den innnerste trekanten er dermed gitt ved:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3} \cdot t^2}{4} = \sqrt{3}(60 - \sqrt{3} \cdot x)^2$$

Siden $V(x) = x \cdot A(x)$ får vi det vi skulle vise.

c) Hvor høy må beholderen være for å romme mest mulig?

Fra forrige deloppgave vet vi at $V(x) = \sqrt{3} \cdot x \cdot (60 - \sqrt{3} \cdot x)^2$. Vi blir bedt om å maksimere dette uttrykket. Vi finner den deriverte (produktregelen):

$$V'(x) = \sqrt{3} \cdot (60 - \sqrt{3} \cdot x)^2 - 6x \cdot (60 - \sqrt{3} \cdot x)$$
$$= \sqrt{3}(60 - \sqrt{3} \cdot x)(60 - \sqrt{3} \cdot x - 2\sqrt{3} \cdot x) = \sqrt{3}(60 - \sqrt{3} \cdot x)(60 - 3\sqrt{3} \cdot x)$$

Dette medfører at $V'(x) = 0$ hvis og bare hvis $(60 - \sqrt{3} \cdot x) = 0$ eller $(60 - 3\sqrt{3} \cdot x) = 0$. Dvs. $x = 20\sqrt{3}$ eller $x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

Vi kan benytte andrederiverttesten for å avgjøre hva slags ekstremalpunkt disse punktene svarer til:

$$V''(x) = -3(60 - 3\sqrt{3} \cdot x) - 9(60 - \sqrt{3} \cdot x) = 18\sqrt{3} \cdot x - 12 \cdot 60 = 18(\sqrt{3} \cdot x - 40)$$

Vi ser at $V''(20\sqrt{3}) = 18(3 \cdot 20 - 40) > 0$ og $V''(20\sqrt{3}) = 18(\sqrt{3} \cdot 20 - 40) < 0$.

Dette betyr at $x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ gir et lokalt maksimum for $V(x)$, altså høyden i beholderen må være $\frac{20\sqrt{3}}{3} cm$.

01.06.2016, Trondheim *Dato/sted*	Tore Forbregd *Faglærer/oppgavegiver*

Ved eksamen benyttes følgende karakterskala:

Symbol	***Betegnelse***	***Generell, kvalitativ beskrivelse av vurderingskriterier***
A	Fremragende	Fremragende prestasjon som klart utmerker seg. Viser svært god vurderingsevne og stor grad av selvstendighet.
B	Meget god	Meget god prestasjon. Kandidaten viser meget god vurderingsevne og selvstendighet.
C	God	Jevnt god prestasjon som er tilfredsstillende på de fleste områder. Kandidaten viser god vurderingsevne og selvstendighet på de viktigste områdene.
D	Nokså god	En akseptabel prestasjon med noen vesentlige mangler. Kandidaten viser en viss grad av vurderingsevne og selvstendighet.
E	Tilstrekkelig	Prestasjon som tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Kandidaten viser liten vurderingsevne og selvstendighet.
F	Ikke bestått	Prestasjon som ikke tilfredsstiller de faglige minimumskravene. Kandidaten viser både manglende vurderingsevne og manglende selvstendighet.